Differentialgleichungen und ihre Lösungen

March 26, 2005

1. $\dot{x} = ax(t)$
   - $x(t) = Ce^{at}$
2. $\dot{x} = ax(t) + b$
   - $x_h(t) = Ce^{at}$
   - $x_p(t) = -\frac{b}{a}$
   - $x(t) = Ce^{at} - \frac{b}{a}$
3. $\dot{x} = ax(t) + b_0 + b_1 t$
   - $x_h(t) = Ce^{at}$
   - $x_p(t) = -\frac{b_1}{a^2} - \frac{b_0}{a} - \frac{b_1}{a}t$
   - $x(t) = Ce^{at} - \frac{b_1}{a^2} - \frac{b_0}{a} - \frac{b_1}{a}t$
4. $\dot{x} = ax(t) + b_0 e^{b_1 t}$
   - $x_h(t) = Ce^{at}$
   - $x_p(t) = \frac{b_0}{b_1 - a} e^{b_1 t}$
   - $x(t) = Ce^{at} + \frac{b_0}{b_1 - a} e^{b_1 t}$
5. $\dot{x} = ax(t) + b \cos \omega t$
   - $x_h(t) = Ce^{at}$
   - $x_p(t) = -\frac{ab}{a^2 - \omega^2} \cos \omega t - \frac{b\omega}{a^2 + \omega^2} \sin \omega t$
   - $x(t) = Ce^{at} - \frac{ab}{a^2 - \omega^2} \cos \omega t - \frac{b\omega}{a^2 + \omega^2} \sin \omega t$
6. Variation der Konstanten Formel für $\dot{x} = ax(t) + b(t)$
   - $x_h(t) = Ce^{at}$
   - $x_p(t) = e^{at} \int e^{-at} b(t) dt$
   - $x(t) = Ce^{at} + e^{at} \int e^{-at} b(t) dt$

7. Anfangswertproblem für $\dot{x} = ax(t) + b(t)$
   - $x(t_0) = x_0$
   - $x_p(t) = e^{at} \int e^{-at} b(t) dt$
   - $x(t) = (x_0 - x_p(t_0)) e^{a(t-t_0)} + x_p(t)$
8. $\dot{x} = a(t)x(t)$
   - $x(t) = Ce^{A(t)}$ wobei $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s) ds$
9. $\dot{x} = a(t)x(t) + b(t)$
   - $x_p(t) = e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} b(s) ds$
   - $x(t) = Ce^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} b(s) ds$
10. Verhulstgleichung $\dot{x} = (a - bx(t))x(t)$
    - $x(t) = \frac{aCe^{at}}{1+bCe^{at}}$
    - Mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ folgt $x(t) = \frac{ax_0}{bx_0 + (a - bx_0)e^{-a(t-t_0)}}$
11. $\ddot{x} + a\dot{x}(t) + bx(t) = 0$
    - $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$
    - $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ hat im Allgemeinen zwei verschieden Lösungen