Aufgaben der Analysis

March 26, 2005

Dieses Zusammenstellung von Aufgaben soll zur Vorbereitung und Auffrischung des Stoffes Mathematik I bei Prof. Kirchgraber dienen. Rund ein Viertel der Aufgaben wurden exakt übernommen, ein weiterer Viertel abgeändert und der Rest selber erfunden. Dies ist kein offizielles Übungsblatt, es soll nur zur Orientierung in der Vorlesung beitragen und ist als zusätzlicher Service gedacht. Rechner werden an der Prüfung nicht erlaubt sein, sind jedoch hier manchmal nötig. Jeder Aufgabe ist ein Schwierigkeits- bzw. Aufwendigkeitsgrad von 1 (einfach/kurz) bis 4 (schwer/lang) zugeteilt. Bei Fragen zu dieser Zusammenstellung bitte E-Mail an tbisig@gmail.com. Viel Spass und Erfolg!

1. (3) Der **Staat der Mathematikgläubigen** werde mit 9 Mitgliedern gegründet. Pro Jahr vergrössere sich die Bevölkerung um 30%. Von der Unmöglichkeit dieses Unterfangens einmal abgesehen, wie lange würde es gehen, bis die Anzahl Anhänger grösser ist als die Zahl der Weltbevölkerung, wenn man davon ausgeht, dass es zur Zeit der Gründung 6 Milliarden Menschen gibt und sich diese Zahl jedes Jahr um 1% vergrössere?

2. (2) Ein See beinhalte eine unbekannte Anzahl **Krebse**. Forscher wissen, dass der Krebsbestand aufgrund einer Krankheit jährlich um $20'000$ Krebse vermindert wird. Sie wissen auch, dass der Restbestand sich jährlich um 5% vergrössert. Wie gross muss der Krebsbestand sein, damit die Krebse nicht aussterben? (Der Einfachheit halber nehme man an, es werden zuerst 20'000 Krebse abgezogen vom Gesamten und dann 5% der übrigen Krebse dazugezählt.)

3. (1) Der **Muschelbestand** eines Sees betrage eine Million Muscheln. Es verenden aus unbekanntem Grund im ersten Jahr 5%, im zweiten Jahr 15%, im dritten wieder 5%, im vierten wieder 15% usw. Wenn man dem See pro Jahr $(15\%+5\%)/2 = 10\%$ Muscheln künstlich zufügt, was passiert mit dem Muschelbestand? Steigt er, fällt er oder bleibt er konstant (Raten und dann rechnen)? (Die 5% verenden zur selben Zeit wie die 10% dazukommen, d.h. im ersten Jahr wird als Referenz für beide prozentualen Grössen eine Million genommen.)

4. (3) Man möchte einen Liter ($1dm^3$) Milch (bzw. den **Tetrapack** der die Milch beinhaltet) abmessen und bekommt für die Höhe 11 cm, für die Breite 9.5 cm und für die Tiefe 9.8 cm. Offensichtlich können die Grössen nicht stimmen und man möchte die Grössen mit Hilfe der kleinsten Quadrate bestimmen. Wie geht das?

5. (1-4) Leite folgende Ausdrücke nach x ab:

   - $\frac{x^2}{x^3}$
   - x^{-1}
   - a^x
   - 3^{x^2}
   - $e^{e^{e^x}}$
   - $sin(cos(x))$
   - $sin(x * (sin(x)^2 + cos(x)^2))$
   - $e^{sin(x^{-1})}$
   - $\frac{sin(x)}{cos(x^2)}$
   - $\frac{x+2+x^{0.5}}{x^2+2x+x^{1.5}}$
   - $(1+x)^x$
   - $\sqrt{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

6. (4) Führe für die folgenden Funktionen eine **Kurvendiskussion** durch (Definitions- und Wertebereich, Nullpunkte, Pole, Maxima, Minima, Hoch- & Tiefpunkte, Monotonieverhalten) und skizziere die Funktion:

   - $f_1(x) = \frac{(1+x)^2}{(x^2+x-2)}$
   - $f_2(x) = \frac{x+1}{(2x-15+x^2)}$

7. (2) **Linearisiere** folgende Funktionen $f(x)$ an den Stellen a:

   - $f(x) = ln(2+x), a = -1$
   - $f(x) = \sqrt{(}2x), a = 0$
   - $f(x) = \sqrt{(}2x^3), a = 1$
   - $f(x) = sin(x^2), a = \pi$ und 3
   - $f(x) = (c-2x)^{-1}, a = 1$ und -1

8. (3) Die Länge eines **Rechtecks** wachse mit der Geschwindigkeit 3 cm/s, die Breite mit der Geschwindigkeit 2 cm/s. Mit welcher Geschwindigkeit wächst die Fläche des Rechtecks?

9. (1) Stelle folgende Mengen in der komplexen Zahlenebene z dar:

- $|z| = 3$
- $|z| \geq 4$
- $|z| \leq 5$
- $|z| < 2$, $Im(z) > 1$
- $Re(z) > 1, 1 < Im(z) < 2$
- $arg(z) = \pi$
- $arg(z) = \pi$ und $arg(z) = \pi/2$

10. (4) Newton approximierte 1671 die Lösung des **Anfangswertproblems**
$$\frac{dy(t)}{dt} = 1 - 3t + y(t) + t^2 + ty(t), y(0) = 1$$
durch eine Reihenentwicklung (Taylorpolynom)
$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

11. (2-4) Gib zu folgenden komplexen Funktionen die **Linearfaktorzerlegung** an:
    - $f_1(z) = z^4 - 2z^2 - 8$
    - $f_2(z) = z^2 + iz + 2$
    - $f_3(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 4$
    - $f_4(z) = z^4 + z^3 - z^2 + z - 2$

12. (3) Die **Wirkung** $W(x,t)$, die x Einheiten eines Medikaments t Stunden nach der Einnahme auf einen Patienten haben, werde für $x < a$ durch
$$W(x,t) = (a - x)x^2 t^2 e^{-t}$$
beschrieben. Wann und bei welcher Dosis wird die Wirkung maximal?

13. (3) Ein rechteckiges **Paket** des Volumens V werde verschnürt: dabei werde es einmal der Länge und zweimal der Breite nach umwickelt. Wie müssen Länge, Breite und Höhe des Pakets gewählt werden, damit der Schnurverbrauch am geringsten ist?

14. (3) Eine **Laufbahn** in einem Sportstadion hat einen Umfang von 400 Meter (zumindest die Innenbahn). Welche Länge müssen die zwei geraden Strecken haben, damit die eingeschlossene Fläche minimal/maximal wird (gemeint ist die rechteckige Fläche bzw. der Fussballplatz)?

15. (2) Einem Bauer stehen 20 m **Stacheldraht** zur Verfügung, mit welchem er einen Zaun bauen möchte. Der Zaun soll auf der einen Seite von einer Wand abgeschlossen werden. Wie müssen Länge und Breite gewählt werden, damit die umschlossene Fläche maximal wird?

16. (2-3)Bestimme Realteil, Imaginärteil und Betrag folgender Funktionen:

    - $(1+2i)^2$
    - $(1+2i)^{-1}$
    - $\frac{2+i}{3i+(i-1)^2}$
    - $\frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$

17. (3) Eine verlassene männliche **Fliege** startet 30 m von einer Fensterscheibe mit einem Suizidversuch. Sie fliegt dabei geradewegs die Scheibe an. Ihr Ort x zur Zeit t sei gegeben durch

    $$x(t) = vt - (a(t)t + b)$$

    wobei $v = 5$ m/s sei. Da die Fliegenflügel (und die restliche Fliege) mit der Zeit unter der enormen Geschwindigkeit leiden, gibt es den bremsenden Anteil $a(t)t + b$, wobei $a(t) = 0.1t$ und $b = 1$ sei. Wann erreicht die Fliege die Fensterscheibe? Ihr Suizidversuch wird erfolgreich sein, wenn sie mit mindestens 3 m/s auf die Scheibe kracht. Wird sie den Versuch überleben?

18. (3) **Peter** war 20 Jahre alt, als er unglücklich verstarb. Seine Leiche wurde aber erst viele Jahre später gefunden und untersucht. Leider hatte kurz nach seinem Ableben der hässliche Kohlenwurm rund die Hälfte des C^14 weggefressen, so dass bis heute nur noch 20% des nach dem Festmales vorhandenen C^14 vorhanden ist. Wann wurde Peter geboren? (Halbwertszeit sei $5.6 * 10^3$ a)

19. (3-4) Löse folgende **Differentialgleichungen**

    - $\frac{dx}{dt} = -x(t) + t^2, x(0) = 1$
    - $\frac{dx}{dt} = -x(t) + t^4, x(0) = 1$
    - $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega x$
    - $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = t^2$

20. (3) Untersuche qualitativ die folgende **Differentialgleichung** erster Ordnung:

    $$\frac{dx}{dt} = (x+1)(x^3 - 2x + x^2)$$

    - Finde die Gleichgewichtslösungen
    - Skizziere den Graphen
    - Finde die stabilen und instabilen Gleichgewichtslagen?

Was man sicher können muss, was hilfreich ist und was man nicht vergessen sollte:

- quadratische Lösungsformel
- binomische Formeln
- einwenig Kopfrechnen
- quadratische Ergänzung
- Kurven zeichnen
- Koordinatenachsen anschreiben
- Klaren Lösungsweg oder zumindest die Idee